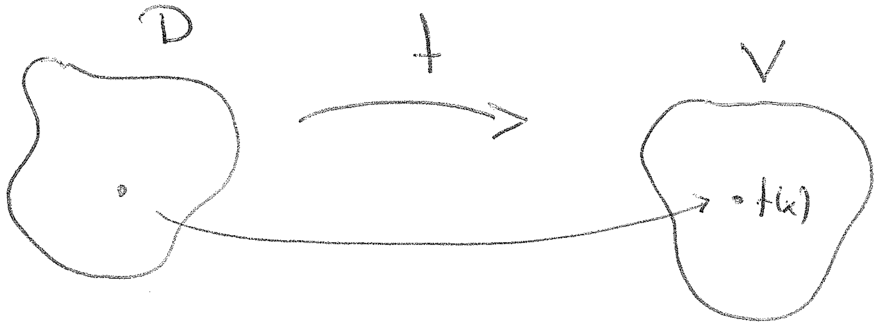
Föreläsning 1

Vi ska börja med att definiera vad en funktion är, och sen ta fram egenskaper för funktioner.



Def:

En funktion f på en mängd D till en mängd V är en regel som till varje $x \in D$ ger ett element $f(x) \in V$.

En funktion tar in ett x och "spottar" ut ett värde $f(x)$.

De x som man kan stoppa in i en funktion kallas f:s definitionsmängd, skrivet som $D(f)$. De värden som f "spottar ut" kallas för f:s värdemängd, eller f:s bild, skrivet som $R(f)$ eller $Im(f)$.

$R(f)$ står för Range

$Im(f)$ står för Image.

Skrivet som mängd:

$$Im(f) = R(f) = \{ f(x) : x \in D(f) \}.$$

Hur hittar man definitionsmängden för en funktion f?

$D(f) = \{$ De x som "går" att stoppa in i $f \}$.

<u>Ex:</u>

Låt $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Då är $x = 1$ en punkt som inte ligger i $D(f)$ eftersom man inte får dela med 0.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Punkten $x = 1$ brukar kallas för en singularitet för f, eller bara för en singulär punkt.

Ex:

Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Eftersom man inte kan ta roten av ett negativt tal så är

$$D(f) = [0, \infty).$$

Vi har även att $Im(f) = [0, \infty)$, så $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

Ex:

Låt $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1.$$

Observera att i detta fall är definitionsmängden redan specificerad: $D(f) = [0, 1]$.
Vad är $Im(f)$? Vi har att

$f(0) = 1$ och $f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 3$, så

$Im(f) = [1, 3]$.

Givet en funktion $f: D \to V$ så är dess graf, skrivet som $\Gamma(f)$, definierad genom

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}.$$

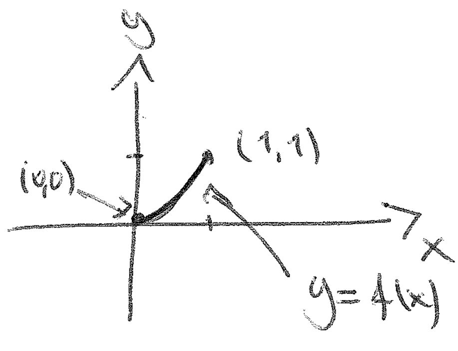
Det är $\Gamma(f)$ som man brukar rita.

Ex:

Betrakta $f: [0,1] \to [0,1]$ definierad genom $f(x) = x^2$. Grafen ges av

$$\Gamma(f) = \{(x, x^2) : x \in [0,1]\}.$$

Ritar vi den så får vi



Definition:

Låt $f: D(f) \to R(f)$ och $g: D(g) \to R(g)$ vara två funktioner. Vi definierar

1) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$

2) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

för alla $x \in D(f) \cap D(g)$.

Definition:

Låt $f: D \to V$ och $g: W \to D$.
Då är sammansättningen av f och g definierad genom

$$f \circ g(x) := f(g(x))$$

Obs:

$f \circ g \neq g \circ f$ generellt sätt.

Ex:

Betrakta funktionerna $f(x)=x^2$ och $g(x)=\sqrt{x-1}$. Då är

$$f\circ g(x)=f(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2=x-1$$

och

$$g\circ f(x)=g(x^2)=\sqrt{x^2-1}.$$

Så $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$.

Fler egenskaper hos funktioner:

1) Injektivitet
2) Surjektivitet
3) Bijektivitet.

Def:

Låt $f: D\to V$ vara en funktion. Vi säger att f är injektiv om $f(x)=f(y)$ betyder att $x=y$, dvs en funktion får inte anta samma värde två gånger.

<u>Ex:</u> Här betraktar vi f som funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Låt $f(x) = x^2$. Vi ska undersöka om f är injektiv. Så antag att $f(x) = f(y)$.

Vi vill se om $x = y$ eller inte.

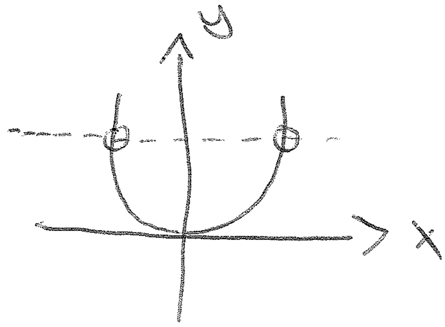
Vi har att $x^2 = y^2$, så drar vi roten ur så får vi att

$$x = \pm y,$$

dvs $x \neq y$, så f är <u>inte</u> injektiv.

<u>Anm:</u>

Betrakta $f(x) = x^2$ igen. Dess graf är



Om man drar en horisontell linje och den skär grafen på minst två ställen så är funktionen <u>inte</u> injektiv.

Def:

Låt $f: D \to V$ vara en funktion. Vi säger att f är surjektiv om $Im(f) = V$, dvs om varje element i V träffas av något element i D under f.

Ex:

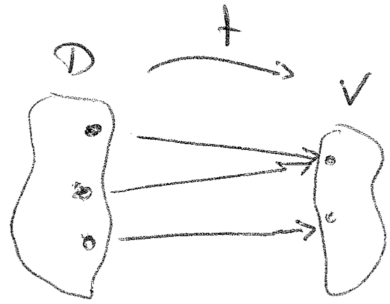
Låt $f(x) = x^2$. Betrakta denna som funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi vill se om f är surjektiv.

Tag $y \in \mathbb{R}$. Vi vill hitta $x \in \mathbb{R}$ så att $f(x) = y$, dvs så att $x^2 = y$, men då är $x = \pm\sqrt{y}$.

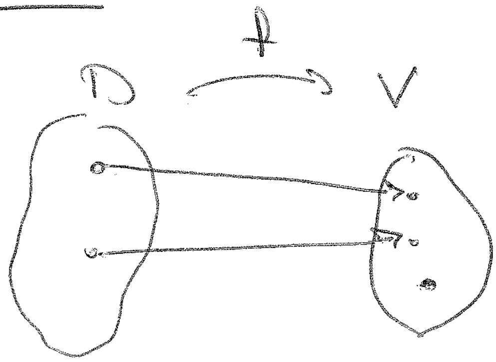
Om $y < 0$ så har denna ekvation ingen lösning, så f är inte surjektiv.

Anm:

Man kan förklara surjektivitet med följande bild

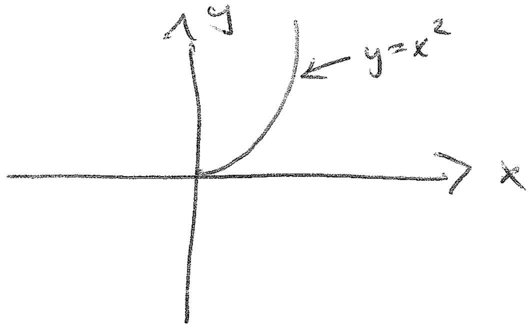


Injektivitet:



Ex:

Låt $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=x^2$. Då är f injektiv ty dess graf är på formen



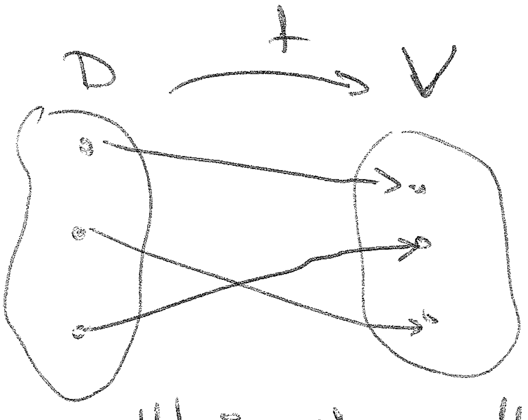
Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ vara definierad genom $f(x) = x^2$. Då är f surjektiv ty vi har exkluderat alla negativa värden.

Def:

Låt $f: D \to V$ vara en funktion. Vi säger att f är bijektiv om f är injektiv och surjektiv. Detta betyder att varje $y \in V$ träffas av precis ett element $x \in D$.

Bild:



Man kan alltså säga att f är bijektiv om D och V har samma antal element och varje element träffas precis en gång.

Ex:

Låt $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ vara definierad genom $f(x) = x^2$. Då är f bijektiv.

Anm:

Både värdemängden och definitionsmängden för en funktion spelar in om funktionen ska vara bijektiv.
T.ex. så är $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$; $f(x) = x^2$ inte bijektiv.

Def:

Låt $f: D \to V$ vara en funktion. Vi säger att f är inverterbar om det finns en funktion $g: V \to D$ så att

$$f \circ g(x) = x$$

och

$$g \circ f(x) = x.$$

Om f är inverterbar så kallas g för f:s invers och skrivs som f^{-1}

Ex:

Betrakta $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ definierad genom $f(x) = x^2$. Då är f inverterbar och dess invers är $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ty

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

och

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad (x > 0).$$

Sats:

Låt $f: D \to V$ vara en funktion. Då är f bijektiv om och endast om f är inverterbar.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att f är bijektiv. Vi vill hitta $g: V \to D$ så att $f \circ g(x) = x$ och $g \circ f(x) = x$. Eftersom f är bijektiv så korresponderar varje $y \in V$ mot ett $x \in D$ så att $f(x) = y$. Definiera $g(y) = x$.

Då är

$$f \circ g(y) = f(x) = y$$

och

$$g \circ f(x) = g(y) = x$$

$\therefore \; g = f^{-1}$.

$\Leftarrow$: Antag att f är inverterbar med invers f^{-1}. Vi vill se att f är injektiv och surjektiv.

<u>Injektivitet:</u> Antag att $f(x) = f(y)$. Använd f^{-1} på båda sidorna så får vi att

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} \circ f(y)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = y.$$

$\therefore$ f injektiv.

<u>Surjektivitet:</u> Tag $y \in V$. Vi vill hitta x så att $f(x) = y$. Använd f^{-1} på denna ekvation så får vi att

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = f^{-1}(y)$$

För detta x så gäller att

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y,$$

dvs f är surjektiv.

$\square$

Ex:

Att ta fram inverser i praktiken går ut på att lösa ekvationen $f(x)=y$.

Betrakta funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad genom $f(x)=x^3$. Denna är bijektiv så låt oss ta fram en invers. Betrakta ekvationen

$$x^3=y \iff x=y^{1/3}.$$

Sätt nu $f^{-1}(x)=x^{1/3}$. Detta är f:s invers.